数　学　Ⅱ

<table>
<tr><td rowspan="2">問　題</td><td colspan="2">選　択　方　法</td></tr>
<tr><td>新教育課程履修者</td><td>旧教育課程履修者</td></tr>
<tr><td>第 1 問</td><td>必　答</td><td>必　答</td></tr>
<tr><td>第 2 問</td><td>必　答</td><td>必　答</td></tr>
<tr><td>第 3 問</td><td>必　答</td><td>必　答</td></tr>
<tr><td>第 4 問</td><td>必　答</td><td rowspan="2">いずれか1問を選択し，解答しなさい。</td></tr>
<tr><td>第 5 問</td><td>解答してはいけません。</td></tr>
</table>

（注）1 「新教育課程履修者」は，第 1 問～第 4 問を解答しなさい。第 5 問は解答してはいけません。

2 「旧教育課程履修者」は，第 1 問～第 3 問と，第 4 問又は第 5 問のいずれか 1 問を選択し，計 4 問を解答しなさい。第 4 問と第 5 問の両方を解答してはいけません。

第1問 （必答問題）（配点　30）

〔1〕　$0^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ の範囲で関数 $f(\theta) = 3\cos 2\theta + 4\sin\theta$ を考える。

$\sin\theta = t$ とおけば

$$\cos 2\theta = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\, t^{\boxed{\text{ウ}}}$$

であるから，$y = f(\theta)$ とおくと

$$y = -\boxed{\text{エ}}\, t^{\boxed{\text{ウ}}} + \boxed{\text{オ}}\, t + \boxed{\text{カ}}$$

である。したがって，y の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{3}$ であり，最小値は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

また，α が $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ を満たす角度で $f(\alpha) = 3$ のとき

$$\sin(\alpha + 30^\circ) = \frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}} + \sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

（数学Ⅱ第1問は6ページに続く。）

〔2〕 不等式

$$2\log_3 x - 4\log_x 27 \leqq 5 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

が成り立つようなxの値の範囲を求めよう。

(1) 不等式(＊)において，xは対数の底であるから

$x > \boxed{\text{セ}}$ かつ $x \neq \boxed{\text{ソ}}$

を満たさなければならない。また

$$\log_x 27 = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\log_3 x}$$

である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(2) 不等式(＊)は

$\boxed{\text{セ}} < x < \boxed{\text{ソ}}$ のとき

$$\boxed{\text{チ}}(\log_3 x)^2 - \boxed{\text{ツ}}\log_3 x - \boxed{\text{テト}} \geqq 0$$

$x > \boxed{\text{ソ}}$ のとき

$$\boxed{\text{チ}}(\log_3 x)^2 - \boxed{\text{ツ}}\log_3 x - \boxed{\text{テト}} \leqq 0$$

と変形できる。したがって，求める x の値の範囲は

$$\boxed{\text{セ}} < x \leqq \frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}},\quad \boxed{\text{ソ}} < x \leqq \boxed{\text{ヌネ}}$$

である。

第2問 (必答問題) (配点 30)

a を正の実数として，C_1，C_2 をそれぞれ次の2次関数のグラフとする。

$$C_1 : y = x^2$$

$$C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a(a+1)$$

また，C_1 と C_2 の両方に接する直線を ℓ とする。

(1) 点 $(t,\ t^2)$ における C_1 の接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ア}}\,tx - t^{\boxed{\text{イ}}}$$

であり，この直線が C_2 に接するのは $t = \boxed{\text{ウ}}$ のときである。

したがって，直線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{エ}}\,x - \boxed{\text{オ}}$$

であり，ℓ と C_2 の接点の座標は

$$\left(\boxed{\text{カキ}} + \boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケコ}} + \boxed{\text{サ}}\right)$$

である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

(2) C_1 と C_2 の交点をPとすると，Pの座標は

$$\left(a+\boxed{\text{シ}},\ \left(a+\boxed{\text{シ}}\right)^2\right)$$

である。点Pを通って直線 ℓ に平行な直線を m とする。直線 m の方程式は

$$y=\boxed{\text{ス}}x+a^{\boxed{\text{セ}}}-\boxed{\text{ソ}}$$

である。直線 m と y 軸との交点の y 座標が正となるような a の値の範囲は $a>\boxed{\text{タ}}$ である。

$a>\boxed{\text{タ}}$ のとき，C_1 の $x\geqq 0$ の部分と直線 m および y 軸で囲まれた図形の面積 S は a を用いて

$$S=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\left(\boxed{\text{テ}}+1\right)^{\boxed{\text{ト}}}\left(\boxed{\text{ナニ}}-1\right)$$

と表される。

第3問 （必答問題）（配点　20）

座標平面上で，連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqq 1 \\ x + y \leqq 1 \\ 3x - y \leqq 3 \end{cases}$$

の表す領域をDとし，原点を中心とする半径1の円をCとする。aを実数とし，点A$\left(-\dfrac{5}{3},\ 0\right)$を通り，傾きが$a$の直線を$\ell$とする。$\ell$と$D$が共有点をもつような$a$の最大値と最小値を求めよう。

(1)　Cと直線$x + y = 1$の共有点の座標は

$$\left(0,\ \boxed{\text{ア}}\right),\quad \left(\boxed{\text{イ}},\ 0\right)$$

であり，Cと直線$3x - y = 3$の共有点の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},\ \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{エ}}}\right),\quad \left(\boxed{\text{キ}},\ 0\right)$$

である。

（数学Ⅱ第3問は次ページに続く。）

(2) C と ℓ が接するのは，$a = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ または $a = -\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときであり，

このときの接点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

したがって，ℓ と D が共有点をもつような a の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であり，

最小値は $\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

「新教育課程履修者」は，第４問を解答しなさい。第５問は解答してはいけません。
「旧教育課程履修者」は，第４問又は第５問のいずれか１問を選択し，解答しなさい。

第４問 （配点　20）

a，b，c を実数とする。整式
$$P(x) = 2x^3 - ax^2 - bx - c$$
は，$P(1) = 6$，$P(2) = 8$ を満たすとする。

(1)　$P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割った余りは $\boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　b と c は a を用いて
$$b = -\boxed{\text{ウ}}\,a + \boxed{\text{エオ}}$$
$$c = \boxed{\text{カ}}\,a - \boxed{\text{キク}}$$
と表される。

（数学Ⅱ第４問は次ページに続く。）

(3) $Q(x)=P(x)-6$ とおくと，(2)より

$$Q(x)=\left(x-\boxed{\text{ケ}}\right)\left\{2x^2-\left(a-\boxed{\text{コ}}\right)x+\boxed{\text{サ}}a-\boxed{\text{シス}}\right\}$$

と表される。

方程式 $Q(x)=0$ が虚数の解をもつような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{セ}}<a<\boxed{\text{ソタ}}$$

である。

a が $\boxed{\text{セ}}<a<\boxed{\text{ソタ}}$ を満たすとき，方程式 $Q(x)=0$ の解のうち，虚数の解の実部が整数となるのは $a=\boxed{\text{チツ}}$ のときであり，この解の実部は $\boxed{\text{テ}}$，虚部は $\boxed{\text{ト}}$，$-\boxed{\text{ト}}$ である。

「新教育課程履修者」は，第５問を解答してはいけません。

「旧教育課程履修者」は，第４問又は第５問のいずれか１問を選択し，解答しなさい。

第５問 （配点 20）

３次関数

$$y = x^3 - 3x^2$$

のグラフを C とする。a を実数として，座標平面上に点 $\mathrm{P}(3,\ a)$ をとる。

(1) 点 $\mathrm{Q}(t,\ t^3 - 3t^2)$ における C の接線が点 P を通るとき

$$\boxed{\text{アイ}}\,t^3 + \boxed{\text{ウエ}}\,t^2 - \boxed{\text{オカ}}\,t = a$$

が成り立つ。

$$f(t) = \boxed{\text{アイ}}\,t^3 + \boxed{\text{ウエ}}\,t^2 - \boxed{\text{オカ}}\,t$$

とおくと，関数 $f(t)$ は $t = \boxed{\text{キ}}$ で極小となり，$t = \boxed{\text{ク}}$ で極大となる。

したがって，点 P を通る C の接線の本数が２本となるのは

$$a = \boxed{\text{ケ}},\quad a = \boxed{\text{コサ}}$$

のときであり，$a = \boxed{\text{ケ}}$ のときの２本の接線の傾きは

$$\boxed{\text{シ}} \text{ と } \boxed{\text{ス}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{シ}}$ と $\boxed{\text{ス}}$ は解答の順序を問わない。

（数学Ⅱ第５問は次ページに続く。）

(2) 点Pを通るCの接線の本数とその傾きの符号は

$a = 2$　のとき $\boxed{\text{セ}}$

$a = -2$ のとき $\boxed{\text{ソ}}$

$a = -6$ のとき $\boxed{\text{タ}}$

である。$\boxed{\text{セ}}$ ～ $\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。

⓪ 接線は1本で，傾きは正

① 接線は1本で，傾きは負

② 接線は3本で，傾きはすべて正

③ 接線は3本で，傾きは1本が正，他の2本は負

④ 接線は3本で，傾きは2本が正，他の1本は負

⑤ 接線は3本で，傾きはすべて負