数　学　I

(全　問　必　答)

第1問 (配点　25)

〔1〕 $a = 3 + 2\sqrt{2}$, $b = 2 + \sqrt{3}$ とすると

$$\frac{1}{a} = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$$

$$\frac{1}{b} = \boxed{\text{エ}} - \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}} - \boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。このとき，不等式

$$|2abx - a^2| < b^2$$

を満たす x の値の範囲は

$$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}} - \boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}} < x < \boxed{\text{セ}} - \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

となる。

(数学I第1問は次ページに続く。)

〔2〕 nを自然数とし

$$A = n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n + 2$$

とおく。

$$n^4 + 3n^2 + 2 = \left(n^2 + \boxed{\text{チ}}\right)\left(n^2 + \boxed{\text{ツ}}\right)$$

であるから

$$A = \left(n^2 + \boxed{\text{テ}}\right)\left(n^2 - \boxed{\text{ト}}\,n + \boxed{\text{ナ}}\right)$$

となる。ただし，$\boxed{\text{チ}}$ と $\boxed{\text{ツ}}$ の解答の順序は問わない。

さらに

$$n^2 - \boxed{\text{ト}}\,n + \boxed{\text{ナ}} = \left(n - \boxed{\text{ニ}}\right)^2 + \boxed{\text{ヌ}}$$

である。

したがって，$A < 1000$ を満たす最大の n は $\boxed{\text{ネ}}$ であり，このときの A の素因数分解は

$$A = \boxed{\text{ノ}} \times \boxed{\text{ハヒ}} \times \boxed{\text{フヘ}}$$

となる。ただし，$\boxed{\text{ハヒ}}$ と $\boxed{\text{フヘ}}$ の解答の順序は問わない。

第2問 (配点 25)

a, b, c を定数とし, $a \neq 0$, $b \neq 0$ とする。x の 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする。G が $y = -3x^2 + 12bx$ のグラフと同じ軸をもつとき

$$a = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。さらに, G が点 $(1, 2b-1)$ を通るとき

$$c = b - \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つ。

以下, ②, ③ のとき, 2 次関数 ① とそのグラフ G を考える。

(数学Ⅰ第2問は次ページに続く。)

(1)　G と x 軸が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$$b < \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}, \qquad \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} < b$$

である。さらに，G と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} < b < \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

(2)　$b > 0$ とする。

$0 \leqq x \leqq b$ における 2 次関数 ① の最小値が $-\dfrac{1}{4}$ であるとき，

$b = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。一方，$x \geqq b$ における 2 次関数 ① の最大値が 3 であるとき，$b = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

$b = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$，$b = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときの ① のグラフをそれぞれ G_1，G_2 とする。G_1 を x 軸方向に $\boxed{\text{テ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{ト}}$ だけ平行移動すれば，G_2 と一致する。

第3問 (配点 25)

点Oを中心とする円Oの円周上に4点A，B，C，Dがこの順にあり，

$$\mathrm{AB}=2,\quad \mathrm{CD}=2\sqrt{3},\quad \mathrm{BD}=2\sqrt{3},\quad \mathrm{AC}=4$$

であるとする。

(1) $\angle\mathrm{BAC}=\theta$，$\mathrm{BC}=x$ とおくと，$\triangle\mathrm{ABC}$ に着目して

$$x^2=\boxed{\text{アイ}}-16\cos\theta$$

となる。また，$\triangle\mathrm{BCD}$ に着目して

$$x^2=24-\boxed{\text{ウエ}}\cos\theta$$

となる。よって，$\cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$，$x=\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ であり，円Oの半径は $\boxed{\text{ケ}}$ である。また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(数学Ⅰ第3問は次ページに続く。)

(2) 点Oを中心とする半径 $\boxed{\text{ケ}}$ の球を考える。点Pを，この球面上の点で三角錐（すい）PABCの体積が最大となるような点とする。

このとき，三角錐PABCの体積は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ であり，

$\mathrm{PA} = \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ である。

さらに，点Pを中心とし，三角錐PABCを含む最小の球の表面積は $\boxed{\text{チツ}}\,\pi$ である。

第４問 （配点　25）

a，b は正の実数で，$\dfrac{a}{b}$ は整数でないとする。$\dfrac{a}{b}$ をこえない最大の整数を m，$\dfrac{b}{a-bm}$ をこえない最大の整数を n とする。すなわち m，n は

$$m < \frac{a}{b} < m+1, \qquad n \leqq \frac{b}{a-bm} < n+1$$

を満たす整数である。

(1)　$a=17$，$b=3$ のとき，$m=$ $\boxed{\text{ア}}$，$n=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　$a=20$，$b=\sqrt{2}$ のとき，$m=$ $\boxed{\text{ウエ}}$，$n=$ $\boxed{\text{オ}}$ である。

（数学Ⅰ第４問は次ページに続く。）

(3) $\dfrac{9}{4} < \dfrac{a}{b} \leqq \dfrac{7}{3}$ であるとき，$m = \boxed{\text{カ}}$ であるから，$\dfrac{a}{b} - m$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} < \frac{a}{b} - m \leqq \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

となる。よって，$\dfrac{b}{a - bm}$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{サ}} \leqq \frac{b}{a - bm} < \boxed{\text{シ}}$$

となり，$n = \boxed{\text{ス}}$ と定まる。

(4) $m = n = 2$ となるときの $\dfrac{a}{b}$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} < \frac{a}{b} \leqq \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。