

数学Ⅱ・数学B

問 題	選 択 方 法
第 1 問	必 答
第 2 問	必 答
第 3 問	} いずれか 2 問を選択し、 解答しなさい。
第 4 問	
第 5 問	
第 6 問	

数学Ⅱ・数学B

第1問 (必答問題) (配点 30)

[1] $x \geq 2$, $y \geq 2$, $8 \leq xy \leq 16$ のとき, $z = \log_2 \sqrt{x} + \log_2 y$ の最大値を求めよう。

$s = \log_2 x$, $t = \log_2 y$ とおくと, s , t , $s + t$ のとり得る値の範囲はそれぞれ

$$s \geq \boxed{\text{ア}}, t \geq \boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}} \leq s + t \leq \boxed{\text{ウ}}$$

となる。また

$$z = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} s + t$$

が成り立つから, z は $s = \boxed{\text{カ}}$, $t = \boxed{\text{キ}}$ のとき最大値 $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ を

とる。したがって, z は $x = \boxed{\text{コ}}$, $y = \boxed{\text{サ}}$ のとき最大値 $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$

をとる。

(数学Ⅱ・数学B第1問は18ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

〔2〕 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$5 \sin \theta - 3 \cos 2\theta = 3 \quad \dots\dots\dots (*)$$

を満たす θ について考えよう。

方程式(*)を $\sin \theta$ を用いて表すと

$$\boxed{\text{シ}} \sin^2 \theta + 5 \sin \theta - \boxed{\text{ス}} = 0$$

となる。したがって、 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ より

$$\sin \theta = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

であり、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲でこの等式を満たす θ のうち、小さい方を θ_1 、大きい方を θ_2 とすると

$$\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}, \quad \cos \theta_2 = \frac{\boxed{\text{チ}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

θ_1 について不等式 $\boxed{\text{ツ}}$ が成り立つ。 $\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

- ① $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{12} < \theta_1 < \frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{6} < \theta_1 < \frac{\pi}{5}$
 ④ $\frac{\pi}{5} < \theta_1 < \frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{4} < \theta_1 < \frac{\pi}{3}$ ⑥ $\frac{\pi}{3} < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$

ただし、必要ならば、次の値

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \quad \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

を用いてもよい。

さらに、不等式 $n\theta_1 > \theta_2$ を満たす自然数 n のうち最小のものは $\boxed{\text{テ}}$ である。

数学Ⅱ・数学B

第2問 (必答問題) (配点 30)

放物線 $y = 2x^2$ を C 、点 $(1, -2)$ を A とする。

点 $Q(u, v)$ に関して、点 A と対称な点を $P(x, y)$ とすると

$$u = \frac{x + \boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad v = \frac{y - \boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

が成り立つ。 Q が C 上を動くときの点 P の軌跡を D とすると、 D は放物線

$$y = x^2 + \boxed{\text{オ}}x + \boxed{\text{カ}}$$

である。

二つの放物線 C と D の交点を R と S とする。ただし、 x 座標の小さい方を R とする。点 R, S の x 座標はそれぞれ $\boxed{\text{キク}}$ 、 $\boxed{\text{ケ}}$ で、点 R, S における放物線 D の接線の方程式はそれぞれ

$$y = \boxed{\text{コ}}, \quad y = \boxed{\text{サ}}x - \boxed{\text{シ}}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

Pを放物線 D 上の点とし、Pの x 座標を a とおく。Pから x 軸に引いた垂線と放物線 C との交点を H とする。 $\boxed{\text{キク}} < a < \boxed{\text{ケ}}$ のとき、三角形 PHR の面積 $S(a)$ は

$$S(a) = \frac{1}{\boxed{\text{ス}}} \left(\boxed{\text{セ}} a^3 + a^2 + \boxed{\text{ソ}} a + \boxed{\text{タ}} \right)$$

と表される。 $S(a)$ は $a = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のとき、最大値をとる。

$a = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のとき、直線 HR と放物線 D の交点のうち、 R と異なる点の

x 座標は $\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。このとき、 $\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \leq x \leq \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ の範囲で、放物

線 D と直線 PH および直線 HR で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{\text{ナニヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$ である。

数学Ⅱ・数学B

第3問 (選択問題) (配点 20)

$\{a_n\}$ を初項 a_1 が1で公比が $\frac{1}{3}$ の等比数列とする。数列 $\{a_n\}$ の偶数番目の項を取り出して、数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{2n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)で定める。 $T_n = \sum_{k=1}^n b_k$ とおく。

(1) $\{b_n\}$ も等比数列であり、その初項は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ 、公比は $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

したがって

$$T_n = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \left(1 - \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}^n} \right)$$

である。また、積 $b_1 b_2 \cdots b_n$ を求めると

$$b_1 b_2 \cdots b_n = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}^{n^2}}$$

となる。

(数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。)

(2) 次に、数列 $\{c_n\}$ を $c_n = 2n \cdot b_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ で定め、 $U_n = \sum_{k=1}^n c_k$ とおく。

$$\boxed{\text{サ}} c_{n+1} - c_n = \boxed{\text{シ}} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つから

$$\sum_{k=1}^n (\boxed{\text{サ}} c_{k+1} - c_k) = \boxed{\text{シ}} T_n \quad \dots \text{①}$$

である。また、この左辺の和をまとめ直すと、 U_n, c_{n+1}, c_1 を用いて

$$\sum_{k=1}^n (\boxed{\text{サ}} c_{k+1} - c_k) = \boxed{\text{ス}} U_n + \boxed{\text{セ}} c_{n+1} - \boxed{\text{ソ}} c_1 \quad \dots \text{②}$$

と表される。

①と②より

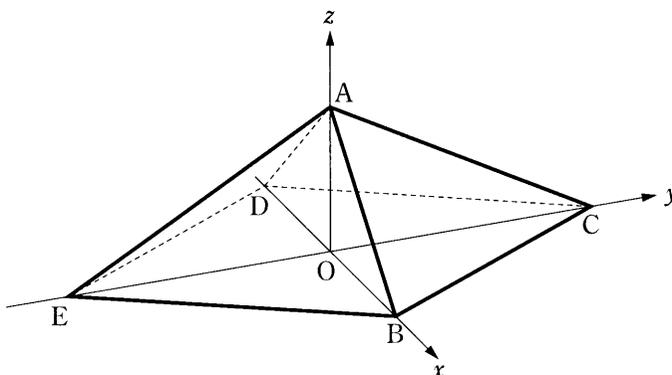
$$U_n = \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}} - \frac{\boxed{\text{トナ}} n + \boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ツテ}}} \cdot \frac{1}{\boxed{\text{ネ}}^n}$$

となる。

数学Ⅱ・数学B

第4問 (選択問題) (配点 20)

Oを原点とする座標空間における5点を $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(-1, 0, 0)$, $E(0, -2, 0)$ とする。ひし形BCDEを底面とする四角錐^{すい}A-BCDEと、平面ABCに平行な平面との共通部分について考える。



(1) $\vec{BC} \cdot \vec{BA} = \boxed{\text{ア}}$ であり、三角形ABCの面積は $\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(2) $\vec{u} = \vec{BA}$, $\vec{v} = \vec{BE}$ とおく。 $0 < a < 1$ とし、点 B_1 を線分 BE を $a : (1 - a)$ に内分する点とすると、 $\vec{BB}_1 = \boxed{\text{エ}}$ \vec{v} である。点 A_1 を

$$\vec{OA}_1 = \vec{OA} + \vec{BB}_1$$

で定め、線分 A_1B_1 と線分 AE が交わることを示そう。 A_1B_1 上の点 P は、

$0 \leq b \leq 1$ を満たす b を用いて

$$\vec{OP} = \vec{OB} + b\vec{u} + \boxed{\text{エ}}\vec{v}$$

と表される。また、AE 上の点 Q は、 $0 \leq c \leq 1$ を満たす c を用いて

$$\vec{OQ} = \vec{OA} + \boxed{\text{オ}}\vec{u} + (\boxed{\text{カ}} - c)\vec{v}$$

と表される。

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

PとQは $b = \boxed{\text{キ}} = \boxed{\text{クケ}} + 1$ のとき一致するから、線分 A_1B_1 とAEは、AEを $\boxed{\text{コ}} : (1 - \boxed{\text{コ}})$ に内分する点で交わることがわかる。この点を E_1 とする。

点 C_1 を

$$\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BB_1}$$

で定めると、同様に考えることにより、線分 A_1C_1 と線分ADも、ADを

$\boxed{\text{サ}} : (1 - \boxed{\text{サ}})$ に内分する点で交わることがわかる。この点を D_1

とすると

$$\overrightarrow{D_1E_1} = \boxed{\text{シ}} \overrightarrow{DE}$$

であり、三角形 $A_1B_1C_1$ は三角形ABCと平行であるから、四角形 $B_1C_1D_1E_1$ の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} (\boxed{\text{ソ}} - \boxed{\text{タ}} \boxed{\text{チ}})$$

である。

また

$$|\overrightarrow{B_1D_1}| = \sqrt{\boxed{\text{ツ}} a^2 - \boxed{\text{テ}} a + \boxed{\text{ト}}}$$

である。

数学Ⅱ・数学B

第5問 (選択問題) (配点 20)

下の表は、10名からなるある少人数クラスをⅠ班とⅡ班に分けて、100点満点で2回ずつ実施した数学と英語のテストの得点をまとめたものである。ただし、表中の平均値はそれぞれ1回目と2回目の数学と英語のクラス全体の平均値を表している。また、A、B、C、Dの値はすべて整数とする。

		1回目		2回目	
班	番号	数学	英語	数学	英語
Ⅰ	1	40	43	60	54
	2	63	55	61	67
	3	59	B	56	60
	4	35	64	60	71
	5	43	36	C	80
Ⅱ	1	A	48	D	50
	2	51	46	54	57
	3	57	71	59	40
	4	32	65	49	42
	5	34	50	57	69
平均値		45.0	E	58.9	59.0

以下、小数の形で解答する場合は、指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入し、解答せよ。途中で割り切れた場合は、指定された桁まで〇にマークすること。

- (1) 1回目の数学の得点について、Ⅰ班の平均値は . 点である。
 また、クラス全体の平均値は45.0点であるので、Ⅱ班の1番目の生徒の数学の得点Aは 点である。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

(2) Ⅱ班の1回目の数学と英語の得点について、数学と英語の分散はともに101.2である。したがって、相関係数は . である。

(3) 1回目の英語の得点について、Ⅰ班の3番目の生徒の得点Bの値がわからないとき、クラス全体の得点の中央値Mの値として 通りの値があり得る。

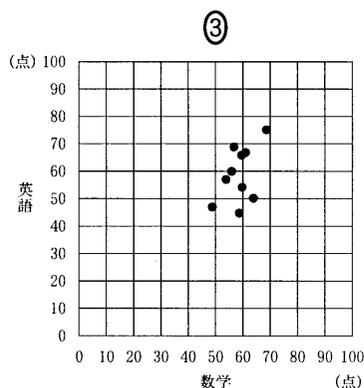
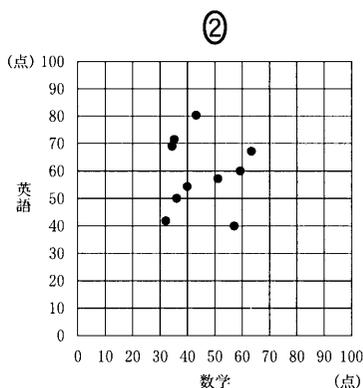
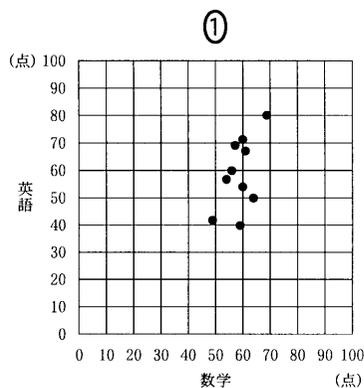
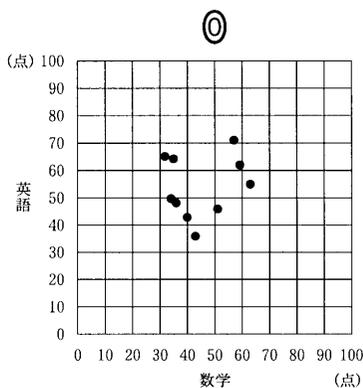
実際は、1回目の英語の得点のクラス全体の平均値Eが54.0点であった。したがって、Bは 点と定まり、中央値Mは . 点である。

(4) 2回目の数学の得点について、Ⅰ班の平均値はⅡ班の平均値より4.6点大きかった。したがって、Ⅰ班の5番目の生徒の得点CからⅡ班の1番目の生徒の得点Dを引いた値は 点である。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

- (5) 1回目のクラス全体の数学と英語の得点の相関図(散布図)は、 であり、2回目のクラス全体の数学と英語の得点の相関図は、 である。また、1回目のクラス全体の数学と英語の得点の相関係数を r_1 、2回目のクラス全体の数学と英語の得点の相関係数を r_2 とするとき、値の組 (r_1, r_2) として正しいのは である。, に当てはまるものを、それぞれ次の①～④のうちから一つずつ選べ。



また、 に当てはまるものを、次の①～④のうちから一つ選べ。

① $(0.54, 0.20)$

② $(-0.54, 0.20)$

③ $(0.20, 0.54)$

④ $(0.20, -0.54)$

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

- (6) 2回目のクラス全体10名の英語の得点について、採点基準を変更したところ、得点の高い方から2名の得点が2点ずつ下がり、得点の低い方から2名の得点が2点ずつ上がったが、その他の6名の得点に変更は生じなかった。このとき、変更後の平均値は する。また、変更後の分散は する。
, に当てはまるものを、それぞれ次の①～③のうちから一つずつ選べ。

- ① 変更前より減少 ② 変更前と一致 ③ 変更前より増加

数学Ⅱ・数学B

第6問 (選択問題) (配点 20)

p, q を異なる自然数とする。このとき、与えられた自然数 d について、 d 以下の自然数 k のうちで

$$k = mp + nq \quad (m, n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}) \dots\dots\dots (*)$$

のように表すことができるものを小さい順にすべて列挙し、最後にその個数を表示したい。そのために次のような〔プログラム〕を作った。ここで、 $\text{INT}(X)$ は X を超えない最大の整数を表す関数である。

〔プログラム〕

```
100 INPUT PROMPT "p=": P
110 INPUT PROMPT "q=": Q
120 INPUT PROMPT "d=": D
130 LET U=0
140 FOR K=1 TO D
150   IF K-INT(K/P)*P=0 THEN 
160   FOR M=0 TO INT(K/P)
170     LET R=K-M*P
180     IF  THEN 
190   NEXT M
200   
210   PRINT K
220   
230 NEXT K
240 PRINT "総数="; U
250 END
```

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

(1) [プログラム]の , , に当てはまるものを, それぞれ次の①~⑨のうちから一つずつ選べ。

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| ① GOTO 150 | ④ GOTO 170 | ⑦ GOTO 180 |
| ② GOTO 200 | ⑤ GOTO 210 | ⑧ GOTO 230 |
| ③ PRINT R | ⑥ PRINT U | ⑨ PRINT M |
| ④ LET R=R+1 | ⑧ LET U=U+1 | ⑨ LET K=K+1 |

また, に当てはまるものを, 次の①~⑤のうちから一つ選べ。

- | | |
|---------------------|--------------------|
| ① $R-INT(R/M)*M<>0$ | ④ $R-INT(R/M)*M=0$ |
| ② $R-INT(R/P)*P<>0$ | ⑤ $R-INT(R/P)*P=0$ |
| ③ $R-INT(R/Q)*Q<>0$ | ⑥ $R-INT(R/Q)*Q=0$ |

(2) [プログラム]を実行し, 変数 P, Q, D にそれぞれ 3, 7, 15 を入力したとき, 整数の列

3 7 9 12 13 14 15

に続いて

総数 = 9

が出力される。また, 変数 P, Q, D にそれぞれ 3, 7, 100 を入力したとき, 整数の列に続いて

総数 =

が出力される。

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

[プログラム]を部分的に変更して、次のような2種類のプログラムを作る。

- (3) 式(*)のように表すことができないような d 以下の自然数 k を小さい順にすべて列挙し、最後にその個数を表示したい。そのためには、[プログラム]の150行および180行にある を に置き換えるとともに、200行を削除すればよい。 に当てはまるものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | | |
|------------|------------|------------|
| ① GOTO 190 | ② GOTO 200 | ③ GOTO 210 |
| ④ GOTO 220 | ⑤ GOTO 230 | ⑥ GOTO 240 |

- (4) 自然数 k に対して、式(*)を満たす組 (m, n) の個数を v_k とする。 d 以下の各自然数 k について v_k を出力し、最後に総数として和 $v_1 + \dots + v_d$ の値を表示したい。そのためには、[プログラム]の150行を

150

のように変更し、180行の を に置き換えて、200行を削除する。さらに210行および220行を

210 PRINT "k=" ;K; "のとき, " ;V; "個"

220

に変更すればよい。, , に当てはまるものを、それぞれ次の①～⑧のうちから一つずつ選べ。

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| ① GOTO 210 | ② GOTO 220 | ③ GOTO 230 |
| ④ LET V=0 | ⑤ LET V=U | ⑥ LET U=U+V |
| ⑦ LET V=V+U | ⑧ LET U=U+1 | ⑨ LET V=V+1 |

問題と解答は、独立行政法人 大学入試センターホームページより転載しています。
ただし、著作権上の都合により、一部の問題・画像を省略しています。

日本一の学校情報



<http://www.js88.com>

インターネット塾・予備校情報サイト



<http://jyuku.js88.com>